

PROBABILITES 1



Objectifs :

- **Construire un arbre et/ou un tableau des probabilités** en lien avec une situation donnée.
- **Exploiter l'arbre et/ou le tableau des probabilités** pour déterminer des probabilités.
- **Calculer la probabilité d'un évènement** connaissant ses probabilités conditionnelles.
- **Utiliser ou justifier l'indépendance** de deux évènements.
- **Traiter des problèmes simples** mettant en œuvre des variables aléatoires dont la loi est **binomiale, uniforme ou normale**.
- **Déterminer les paramètres de la loi normale** approximant une loi binomiale donnée.
- **Savoir utiliser un logiciel ou une calculatrice** pour calculer directement des probabilités et **concevoir et exploiter des simulations** dans le cadre des lois au programme,.

■ Diagnostic des acquis

✎ Avant d'entamer le programme de BTS, cette phase utilise le QCM pour vérifier la maîtrise des concepts appris précédemment.

- **Objectif** : Identifier les lacunes sur le calcul de $P(A \cup B)$, les évènements contraires et les calculs d'espérance basiques.
- **Activité** : Réalisation du quiz interactif (Questions 1 à 7) avec feedback immédiat.

Cet **antisèche de prérequis** regroupe les notions fondamentales nécessaires pour aborder le programme de BTS, telles qu'identifiées dans les sources pour réussir le test de positionnement « Pour commencer ».

I. Opérations sur les évènements

1. Union d'évènements (Réunion)

- **Définition** : L'événement « A ou B » ($A \cup B$) est réalisé si au moins l'un des deux événements se produit.
- **Formule** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Exemple** : Si $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et leur intersection $P(A \cap B) = 0,1$, alors $P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,1 = 0,8$.

2. Intersection d'événements

- **Définition** : L'événement « A et B » ($A \cap B$) est réalisé si les deux événements se produisent simultanément.
- **Formule** : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ (dérivée de la formule de l'union).
- **Exemple** : Pour des événements où $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,6$, on calcule $P(A \cap B) = 0,7 + 0,4 - 0,6 = 0,5$.

II. Logique et types d'événements

3. Événements incompatibles

- **Définition** : Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps.
- **Formule** : $P(A \cap B) = 0$.
- **Exemple** : Si A et B sont incompatibles, alors la probabilité de leur union devient simplement $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Événements contraires (Complémentarité)

- **Définition** : L'événement contraire de A (noté \bar{A}) est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
- **Formule** : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ou $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
- **Exemple** : Si la probabilité qu'une pièce soit conforme est $P(A) = 0,95$, la probabilité qu'elle soit défectueuse (événement contraire) est $P(\bar{A}) = 1 - 0,95 = 0,05$.

III. Statistique descriptive (Variables aléatoires)

5. Espérance mathématique $E(X)$

- **Définition** : Elle correspond à la **valeur moyenne** que l'on peut attendre sur un grand nombre d'expériences.
- **Formule** : $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$ (somme des valeurs multipliées par leur probabilité respective).
- **Exemple** : Pour une loi où X prend les valeurs 1 et 2 avec les probabilités 0,25 et 0,75 : $E(X) = (1 \times 0,25) + (2 \times 0,75) = 0,25 + 1,5 = 1,75$.

6. Écart type $\sigma(X)$

- **Définition** : Indicateur qui permet de **mesurer la dispersion** des valeurs d'une variable autour de sa moyenne (l'espérance).

- **Formule** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, où $V(X)$ est la variance.
- **Exemple** : Si la variance d'une série est de 1, l'écart type est $\sqrt{1} = 1$. S'il est de 0,49, l'écart type est 0,7.

Tableau de correspondance Prérequis / QCM

Thème de rappel	Leçons théoriques	Questions du QCM visées	
Calcul ensembliste	Formule de l'union / Équations	Questions 1, 2, 3	
Logique d'événements	Incompatibilité / Complémentarité	Questions 4, 5	
Statistique descriptive	Espérance / Écart type	Questions 6, 7	

Ces rappels servent à favoriser l'accueil des bacheliers de toutes origines (professionnels et technologiques) avant d'entamer les nouvelles capacités comme le conditionnement ou la loi normale

QCM

 **Pour commencer**

Question 1 Si $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,8$, alors la probabilité de l'intersection $P(A \cap B)$ est égale à :

- a) 0,1.
- b) 0,2.
- c) 0,3.

Question 2 Si $P(A) = 0,7$, $P(A \cup B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,5$, alors la probabilité $P(B)$ est égale à :

- a) 0,1.
- b) 0,4.
- c) 0,7.

Question 3 Si $P(B) = 0,2$, $P(A \cup B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,1$, alors la probabilité $P(A)$ est égale à :

- a) 0,3.
- b) 0,2.
- c) 0,7.

Question 4 Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors :

- a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- b) $P(A) = 1 - P(B)$.
- c) $P(A \cap B) = 1$.
- d) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Question 5 Si A et B sont deux évènements contraires, alors :

- a) $P(A \cap B) = 1$.
- b) $P(A \cup B) = 1$.
- c) $P(A) = 1 + P(B)$.
- d) $P(A) + P(B) = 1$.

Question 6 L'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité vérifie :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

Sont respectivement égales à :

- a) 2 et 1.
- b) 2 et $\sqrt{0,5}$.
- c) 3 et 1.

Question 7 L'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité vérifie :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Sont respectivement égales à :

- a) 2 et 1.
 - b) 1,9 et $\sqrt{0,48}$.
 - c) 1,9 et 0,7.
-

■ Séquence 1 : Conditionnement et indépendance



Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- calculer une probabilité conditionnelle ;
- utiliser la formule des probabilités totales ;
- modéliser une situation avec un arbre de probabilités ;
- déterminer si deux événements sont indépendants ;
- interpréter un résultat dans un contexte concret.

 → [L'essentiel](#)

I - Théorie

Soit (Ω, E, P) un espace probabilisé. Pour $A \in E$ on note \bar{A} son événement contraire.

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Si $P(A) \neq 0$, on définit l'application P_A qui, à tout événement B de Ω , associe le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

P_A est une probabilité sur Ω appelée "**probabilité conditionnelle** sachant que A est réalisé".

REMARQUE : $P_A(B)$ se note aussi $P(B|A)$ et se lit « probabilité de B sachant A ».

Formule des probabilités totales

Si les événements A_1, A_2, \dots, A_n , où n est un entier naturel non nul, forment une **partition** de l'univers et sont de probabilités non nulles, alors pour tout événement B de Ω :

$$P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B)P(A_n)$$

En particulier, pour tous événements A et B avec $P(A)$ non nulle et non égale à 1, on a :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$$

Indépendance

🔗 DÉFINITION

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** lorsque la réalisation de l'un des deux évènements n'a aucune influence sur celle de l'autre, ce qui se traduit lorsque la probabilité conditionnelle est définie (c'est-à-dire $P(A) \neq 0$ ou $P(B) \neq 0$) par :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A) = P(A)$$

Remarque : Les évènements de probabilités nulles sont indépendants de tout évènement.

Conséquence : Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

→ Voir Exercice résolu 1

🗺️ 1. Situation d'introduction

Dans une entreprise, une pièce passe par deux machines.

On constate que :

- certaines pièces sont défectueuses après la première machine ;
- la probabilité d'un défaut après la seconde dépend de la première.

👉 Question : comment modéliser et calculer ces probabilités ?

📖 2. Cours

2.1 Probabilité conditionnelle

Définition

Soient deux évènements A et B avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de B sachant A est :

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Interprétation

👉 On se place **uniquement dans les cas où A est réalisé.**

2.2 Arbre de probabilités

Un arbre permet de représenter une expérience en plusieurs étapes.

Règles

- Sur une branche : probabilité conditionnelle
 - Sur un chemin : on **multiplie**
 - Pour plusieurs cas : on **additionne**
-

2.3 Formule des probabilités totales

Si A et \bar{A} forment une partition :

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})$$

👉 On additionne les différents cas possibles.

2.4 Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Interprétation

👉 La réalisation de l'un **n'influence pas** l'autre.

🔧 3. Méthodes

Méthode 1 — Calculer une probabilité conditionnelle

1. Identifier A et B
 2. Calculer $P(A \cap B)$
 3. Calculer $P(A)$
 4. Appliquer la formule
-

Méthode 2 — Utiliser un arbre

1. Identifier les étapes
2. Placer les probabilités
3. Multiplier le long des branches

Méthode 3 — Probabilités totales

1. Identifier les cas (partition)
2. Calculer chaque branche
3. Additionner

II - Exercices résolus

Exercice résolu 1. Appliquer la probabilité conditionnelle

Énoncé :

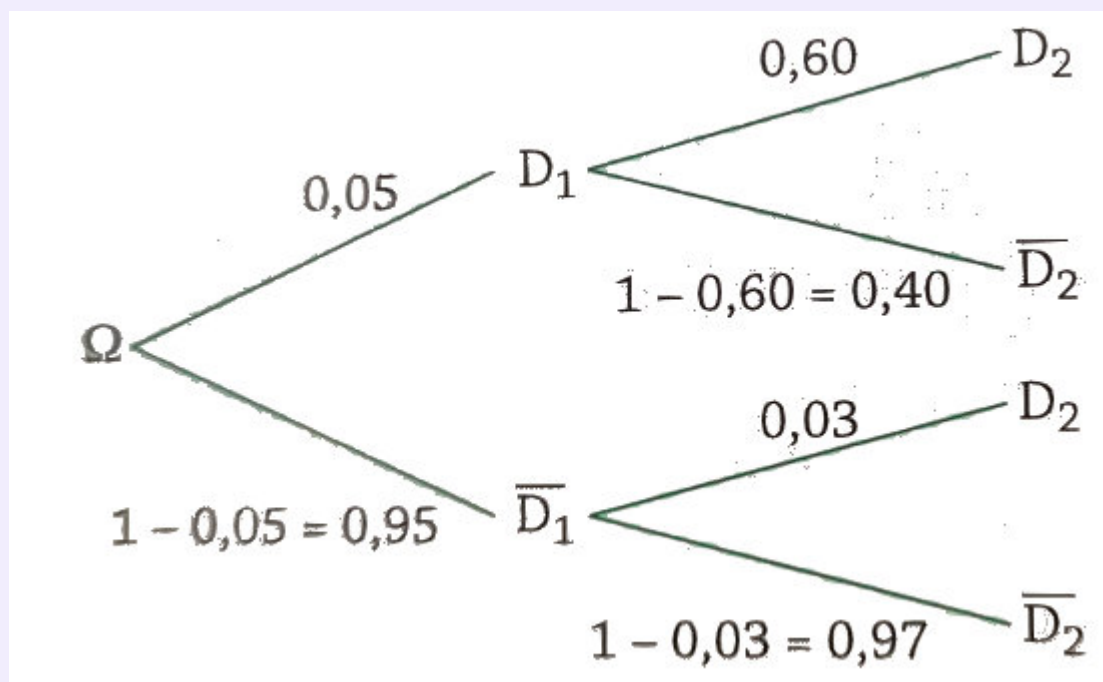
Pour fabriquer un appareil, on utilise successivement, et dans cet ordre, deux machines M_1 et M_2 qui provoquent chacune un défaut respectivement noté D_1 et D_2 .

Un relevé statistique permet d'estimer que :

- À la sortie de M_1 , 5 % des appareils présentent un défaut D_1 ;
- À la sortie de M_2 , 60 % des appareils ayant le défaut D_1 présentent le défaut D_2 alors que seulement 3 % des appareils n'ayant pas le défaut D_1 présentent le défaut D_2 .

On prélève au hasard un appareil. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de défaut ? Qu'il présente le défaut D_2 ?

☰ Résolution



[Image d'un arbre de probabilité pondéré avec branches D_1 et D_2]

On cherche la probabilité que l'appareil n'ait pas de défaut, soit :

$$P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0,95 \times 0,97 = 0,9215$$

On cherche ensuite la probabilité qu'il ait le défaut D_2 . D'après la **formule des probabilités totales** :

$$P(D_2) = P_{D_1}(D_2) \cdot P(D_1) + P_{\overline{D_1}}(D_2) \cdot P(\overline{D_1})$$

$$P(D_2) = 0,60 \times 0,05 + 0,03 \times 0,95 = 0,0585$$

Méthode

- On construit l'arbre de probabilité afin de clarifier l'énoncé.
- La probabilité d'un évènement est égale au produit des probabilités rencontrées sur le chemin pour définir cet évènement.

III - Exercices pour appliquer

 **Pour appliquer** → *L'essentiel*

Exercices 1 - 4 :

- Exercice 1. Étude sur 110 étudiants - pour manipuler les tableaux de contingence
- Exercice 2. Composants électroniques - pour s'entraîner sur les probabilités totales et les erreurs de contrôle
- Exercice 3. Calculer P
- Exercice 4. Deux urnes

Exercice 1. Étude sur 110 étudiants

110 étudiants se répartissent de la façon suivante :

	Fille	Garçon	Total
Pratiquent un sport	32	48	80
Ne pratiquent aucun sport	10	20	30
Total	42	68	110

On tire au hasard un étudiant parmi les 110 et on considère les évènements suivants :

- F : « L'étudiant est une fille »
- S : « L'étudiant pratique un sport »

1. À l'aide du tableau, déterminer les probabilités suivantes : $P(S)$, $P(F \cap S)$, $P(F)$.
2. Vérifier que

$$P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S)$$

3. Déterminer la probabilité de l'évènement : « être un garçon ou ne pas pratiquer de sport ».

Exercice 2. Contrôle de composants électroniques

Un atelier contrôle les composants électroniques fabriqués en grande quantité. 2 % des composants sont défectueux. Le contrôle est tel que 95 % des composants non défectueux sont acceptés et que 98 % des composants défectueux sont refusés.

1. On considère un lot de 10 000 composants. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Défectueux	Non défectueux	Total
Acceptés			
Refusés			
Total			10 000

2. On prélève au hasard un composant. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
 - E_1 : « Le composant est défectueux et accepté ».
 - E_2 : « Le composant est bon et refusé ».
 - E : « Il y a une erreur de contrôle ».
3. Déterminer la probabilité de l'évènement : « Le composant est bon sachant qu'il a été refusé ».

Exercice 3. Calculs théoriques

On considère les deux évènements A et B tels que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

Calculer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 4. Tirage dans deux urnes

Deux urnes A et B de même apparence contiennent respectivement :

- **Urne A** : 3 boules rouges et 2 boules vertes.
- **Urne B** : 2 boules rouges et 3 boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1. Calculer la probabilité qu'elle soit rouge.
2. On suppose que la boule tirée est rouge. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A .

IV - Exercices pour s'entraîner

Exercices 16 - 18 :

- Exercice 16. Une maladie rare
- Exercice 17. Atelier du composant électronique
- Exercice 18. Taux d'alcoolémie

Conditionnement et indépendance

Exercice 16. Une maladie rare

Une maladie rare est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000. Un test de dépistage est tel que si une personne est malade, le test est positif à 99 %, et si une personne est saine le test est positif à 0,1 %. On note M et T les évènements respectifs « la personne est malade » et « le test est positif ».

1. Dédire de l'énoncé $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\bar{M}}(T)$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer $P(T)$.
3. Déterminer la probabilité qu'une personne positive au test soit effectivement malade. Que constatez-vous ?
4. Reprendre la question 3. avec une proportion de malades de 10 %. Qu'en déduire sur l'efficacité des tests de dépistage ?

Exercice 17. Atelier du composant électronique

Un atelier produit un composant électronique en deux phases indépendantes. La première est susceptible de faire apparaître un défaut A sur 2 % des composants, la seconde un défaut B sur 3 % des composants. On prélève au hasard un composant dans la production. Calculer à 10^{-4} près la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. Le composant présente les deux défauts.
2. Le composant présente au moins un des deux défauts.
3. Le composant ne présente aucun des deux défauts.
4. Le composant présente un et un seul des deux défauts.

Exercice 18. Taux d'alcoolémie

Le seuil maximal d'alcoolémie toléré pour conduire une automobile est 0,5 gramme par litre. Un laboratoire a mis au point un éthylotest présentant les défauts suivants :

- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré, l'éthylotest est positif 96 fois sur 100 ;
- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré, l'éthylotest est positif 2 fois sur 100. Dans une région donnée, 95 % des conducteurs d'automobile ont un seuil d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré. On soumet au hasard un automobiliste de cette région à l'éthylotest. On définit les évènements suivants :
 - O : « l'éthylotest est positif » et
 - S : « le conducteur a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré ».

1. Définir les évènements \bar{O} et \bar{S} .
2. Que valent $P(S)$, $P(\bar{S})$, $P_S(O)$ et $P_{\bar{S}}(O)$?
3. Calculer la probabilité que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré et que l'éthylotest soit positif.
4. a) Calculer $P(O \cap S)$ puis $P(O)$. b) Calculer la probabilité qu'il ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré sachant que l'éthylotest est positif.
5. Calculer la probabilité que l'éthylotest donne un résultat erroné.

VI Outil numérique

Utilisation d'un logiciel de schématisation ou d'un module interactif Moodle pour construire des arbres.

Application professionnelle (BTS)



Contexte réel

Dans les métiers techniques ou tertiaires :

- diagnostic de panne
- contrôle qualité
- tests médicaux ou industriels
- fiabilité d'un système

Exemple

Un technicien doit déterminer :

- si un défaut vient d'une machine précise
- si un test est fiable

 Il utilise :

- probabilité conditionnelle
 - arbre
 - probabilités totales
-

Point clé

 Dans la réalité, les événements sont souvent **dépendants**

 Exemple :

- une panne influence les étapes suivantes
 - un test dépend de l'état du système
-



À retenir

- $P(B | A)$ = changer de point de vue
 - arbre = outil essentiel
 - multiplier sur un chemin
 - additionner les cas
 - indépendance = situation particulière
-

Séquence 2 : Loi à densité



 Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- reconnaître une variable aléatoire continue ;
- utiliser la loi uniforme ;
- utiliser la loi normale ;
- calculer et interpréter des probabilités ;
- exploiter une calculatrice ou un outil numérique.

I - Théorie

 → *L'essentiel*

Loi uniforme sur $[a; b]$

DÉFINITION

Une variable aléatoire X à valeur dans $[a; b]$ suit la **loi uniforme** $\mathcal{U}_{[a;b]}$ sur $[a; b]$ lorsque sa densité de probabilité est une fonction constante, nécessairement égale à $\frac{1}{b-a}$.

Pour tout $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

Ainsi, pour tout $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta - \alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de } [\beta; \alpha]}{\text{longueur de } [a; b]}$.

PROPRIÉTÉ

Pour une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a; b]$:

- **Espérance** : $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- **Variance** : $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- **Écart type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi normale** $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ d'espérance μ et d'écart type σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Ainsi pour tout $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$: $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

L'espérance et l'écart type de X sont respectivement $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$.

THÉORÈME (Loi Normale)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ alors :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

 → [Voir Exercices résolus 3 et 4](#)

1. Situation d'introduction

On mesure :


- le temps d'attente d'un client
- la taille d'une pièce mécanique
- une performance (QI, note...)

 Ces grandeurs peuvent prendre **une infinité de valeurs**.

2. Cours

2.1 Variable aléatoire continue

Contrairement au cas discret :

 $P(X = a) = 0$

On travaille avec des intervalles :

$$P(a \leq X \leq b)$$

2.2 Loi uniforme

Définition

Une variable X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ si toutes les valeurs sont équiprobables.

$$X \sim \mathcal{U}([a; b])$$

Probabilité

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Paramètres

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

2.3 Loi normale

Définition

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$$

- μ : moyenne
 - σ : écart type
-

Propriétés fondamentales

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

3. Méthodes

Méthode 1 — Loi uniforme

1. Identifier a et b
 2. Identifier l'intervalle
 3. Appliquer la formule
-

Méthode 2 — Loi normale

1. Identifier μ et σ
2. Traduire la question
3. Utiliser :
 - symétrie
 - calculatrice

II - Exercices résolus

Exercice résolu 3. Généraliser l'équiprobabilité sur un intervalle : la loi uniforme

Énoncé :

1. Dans l'intervalle $[0; 1[$, quel est le nombre d'éléments dont l'écriture décimale comporte au plus 1 chiffre après la virgule ? 2 chiffres ? 5 chiffres ? k chiffres, où k est un entier naturel non nul ?
2. Soient n un entier naturel non nul et $\Omega = E_k$ l'ensemble des réels de $[0; n[$ dont l'écriture décimale comporte au plus k chiffres après la virgule. On choisit au hasard un nombre dans Ω .
 - **a)** Montrer que la probabilité de tirer un nombre au hasard dans Ω est $\frac{10^{-k}}{n}$.
 - **b)** De manière générale, si t est un élément de Ω , quelle est la probabilité de l'évènement $B = \{x \in \Omega ; x < t\}$?
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; n[$. Pour $t \in [0; n[$, exprimer en fonction de t : $F(t) = P(X < t)$, fonction de répartition de X . Qu'en déduit-on ?

≡ Résolution

1. On a respectivement 10, 100, 10^5 et 10^k éléments dans l'intervalle $[0; 1[$.
2. **a)** Dans $[0; 1[$, on a 10^k éléments de sorte que dans l'intervalle $[0; n[$, on en a n fois plus. Le tirage au hasard fait que tous ces éléments ont la même probabilité d'être choisis (loi équirépartie), soit :

$$\frac{1}{n \cdot 10^k} = \frac{10^{-k}}{n}$$

b) Nous obtenons $P(B) = \frac{t}{n}$.

3. On a

$$F(t) = P(X < t) = \frac{t - 0}{n - 0} = \frac{t}{n}$$

On retrouve la même probabilité que dans le cas discret avec la loi équirépartie. La loi uniforme généralise, au continu, l'équiprobabilité du cas discret.

Méthode

On justifie qu'il s'agit d'une loi équirépartie dont on donne les caractéristiques. On peut ensuite appliquer les résultats du cours pour cette loi.

Exercice résolu 4. Déterminer une loi de probabilité normale

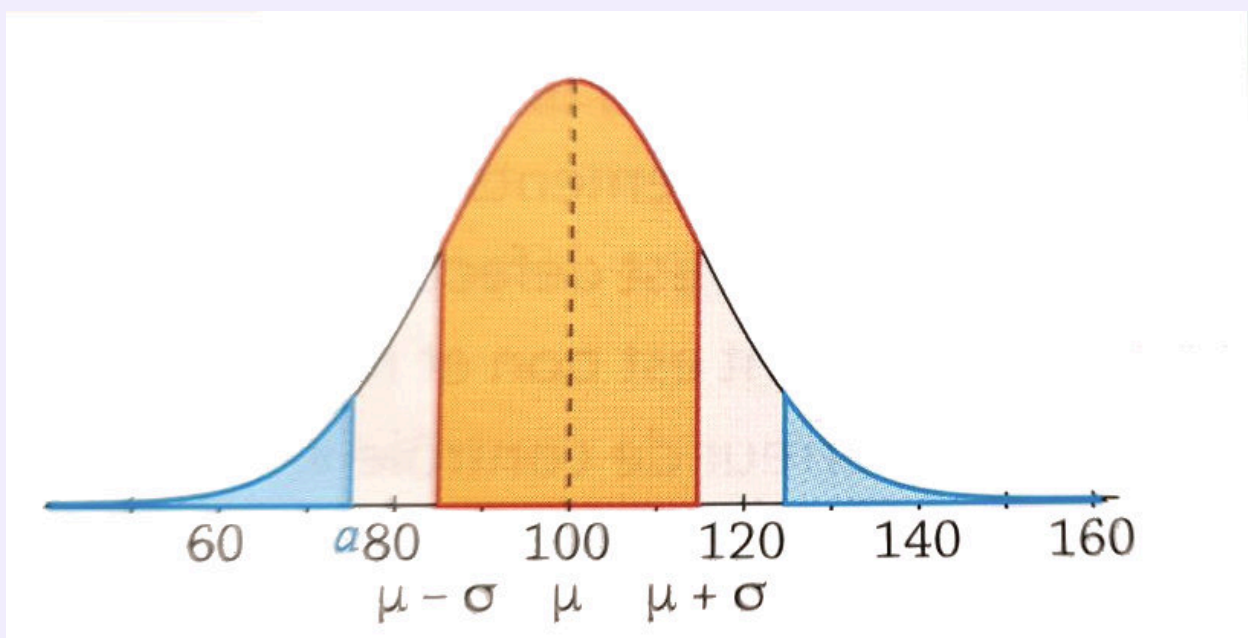
Utilisation de la calculatrice

Énoncé :

En 1955, Wechsler (1896-1981) propose un test de mesure de QI (Quotient Intellectuel) des adultes auprès d'un échantillon représentatif de la population d'un âge donné. Les performances suivent une loi normale d'espérance égale à $\mu = 100$ et d'écart type égal à $\sigma = 15$.

1. Quel est le pourcentage de personnes dont le QI est inférieur à 100 ?
2. Quelle chance a-t-on d'obtenir un QI compris entre 85 et 115 ? Entre 105 et 110 ?
3. Une personne avec un score de 69 fait-elle partie des 5 % inférieurs de la distribution ?

Résolution



1. Par symétrie de la courbe, on obtient $P(X < \mu) = 0,5$, soit :

$$P(X < 100) = 0,5$$

2. On a $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$ d'après le cours, d'où la probabilité cherchée.

À la calculatrice : $P(105 < X < 110) \approx 0,12$.

3. Cherchons t tel que $F(t) = P(X < t) = 0,05$. À la calculatrice nous trouvons $t \approx 75,33$.

Ainsi, la fonction de répartition F étant croissante, pour un score de 69 on a $F(69) < 0,05$. La personne fait donc partie des 5 % inférieurs de la distribution.

Méthode

On utilise les propriétés de symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale.

III - Exercices pour appliquer

Pour appliquer → L'essentiel

Exercices 5 - 12 :

- Exercice 5. Observation de chamois
- Exercice 6. Pièces mécaniques
- Exercice 7. Inéquation aléatoire
- Exercice 8. Calculs de probabilités (Loi normale)
- Exercice 9. Recherche de seuils (Loi normale)
- Exercice 10. Calcul de l'espérance m
- Exercice 11. Calcul de l'écart type σ
- Exercice 12. Problème de rendez-vous (Loi uniforme)

Exercice 5. Observation de chamois

Dans un parc national, un guide propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil. Le temps d'attente T du groupe, en heures, avant l'arrivée des animaux suit une loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

Calculer les probabilités suivantes :

- a) $P(T > 0,5)$
- b) $P(0,2 < T < 0,6)$
- c) $P(T = 0,6)$

Exercice 6. Pièces mécaniques

Un appareil de mesure évalue l'épaisseur en cm de pièces mécaniques qui est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0; 20]$. Les pièces sont acceptées si leur épaisseur est supérieure à 12 cm.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer la probabilité qu'une pièce soit acceptée.
2. Une pièce a une épaisseur supérieure à 10 cm. Quelle est la probabilité qu'elle soit acceptée ?
3. On note $\mu = E(X)$ l'espérance de X et $\sigma = \sigma(X)$ son écart type. Calculer

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

Exercice 7. Inéquation aléatoire

1. Résoudre l'équation $x^2 - 2x = 0$.
2. On choisit au hasard un réel dans l'intervalle $[-1 ; 3]$. Calculer la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $x^2 - 2x > 0$.

Exercices : Loi Normale

 **Pour appliquer** → *L'essentiel*

Exercice 8. Calculs de probabilités (Loi normale)

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; 5)$. À l'aide de la calculatrice, déterminer à 10^{-2} près :

- **a)** $P(X < 28)$
- **b)** $P(X > 28)$
- **c)** $P(X > 12)$
- **d)** $P(12 < X < 28)$
- **e)** $P(15 < X < 25)$

Exercice 9. Recherche de seuils (Loi normale)

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; 5)$. À l'aide de la calculatrice, déterminer à 10^{-2} près le nombre réel α tel que :

- **a)** $P(X < \alpha) = 0,99$
- **b)** $P(X \leq \alpha) = 0,01$
- **c)** $P(X > \alpha) = 0,05$
- **d)** $P(X \geq \alpha) = 0,9$

- e) $P(20 - \alpha \leq X \leq 20 + \alpha) = 0,95$

Exercice 10. Calcul de l'espérance m

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m ; 2)$.

1. Calculer m pour que $P(X > 25) = 0,95$.
2. Calculer m pour que $P(X > 25) = 0,05$.

Exercice 11. Calcul de l'écart type σ

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20 ; \sigma)$.

1. Calculer σ pour que $P(X < 22) = 0,9$.
2. Calculer σ pour que $P(18 < X < 22) = 0,9$.

Exercice 12. Problème de rendez-vous (Loi uniforme)

M. Dupont et M. Dupond se donnent rendez-vous entre 12 h et 13 h. M. Dupont et M. Dupond se donnent rendez-vous entre 12 h et 13 h. Proche du lieu fixé, M. Dupond arrivera assurément à 12 h 30. Quant à M. Dupont, son arrivée dépend des conditions de circulation : il arrivera entre 12 h et 13 h.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de M. Dupont ?
2. Calculer la probabilité que M. Dupont arrive avant M. Dupond.
3. Calculer la probabilité que M. Dupond attende M. Dupont plus de 10 min.

IV - Exercices pour s'entraîner

Exercices 19 - 24 :

- Exercice 19. La taille de 2 500 hommes
- Exercice 20. Production des pipettes
- Exercice 21. Somme de variables aléatoires discrètes
- Exercice 22. Somme de variables normales
- Exercice 23. Somme de lancers de dés
- Exercice 24. Statistiques du BAC

Exercices : Loi à densité

 Utilisation de la calculatrice

Exercice 19. La taille de 2 500 hommes

On mesure la taille en cm de 2 500 hommes ; la distribution obtenue suit une loi normale de moyenne égale à 169 cm et d'écart type égal à 5,6 cm.

1. Déterminer le pourcentage d'hommes dont la taille est inférieure à 155 cm.
2. Déterminer le pourcentage d'hommes dont la taille est comprise entre 155 cm et 175 cm.
3. Déterminer l'intervalle, centré sur la valeur moyenne de la taille, qui contient 60 % de la population en question.

Exercice 20. Production des pipettes

Le diamètre intérieur d'un échantillon de 200 pipettes produites par une machine est estimé à 0,501 cm, et l'écart type moyen est de l'ordre de 0,004 cm. La distribution de ces diamètres suit une loi normale. Ces pipettes doivent passer dans une chaîne de montage entièrement automatisée mais elles ne peuvent convenir pour cela que si et seulement si leur diamètre est compris entre 0,496 et 0,508 cm.

1. Déterminer le pourcentage de pipettes qui devront être considérées comme défectueuses.
2. Comment ce pourcentage évolue-t-il si la nouvelle machine de vérification n'admet que des diamètres compris entre 0,498 et 0,510 ?

Exercice 21. Somme de variables aléatoires discrètes

Utilisation de la calculatrice

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilités sont définies par les tableaux suivants :

x_i	0	5	10	15
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

y_j	-5	5	15
$P(Y=y_j)$	0,4	0,3	0,3

Question : Calculer l'espérance mathématique et une valeur approchée de l'écart type de la variable aléatoire $X+Y$.

Exercice 22. Somme de variables normales

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent respectivement les lois normales $\mathcal{N}(20 ; 4)$ et $\mathcal{N}(17 ; 3)$. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$ et on admet que Z suit une loi normale.

1. Montrer que l'espérance $E(Z)$ et l'écart type $\sigma(Z)$ sont respectivement égaux à 37 et 5.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « $32 < Z < 42$ ».
3. Déterminer le nombre réel positif α tel que la probabilité de l'évènement « $37 - \alpha < Z < 37 + \alpha$ » soit égale à 0,96.

Exercice 23. Somme de lancers de dés

On lance un dé non pipé 100 fois de façon indépendante.

Quelle est la probabilité que la somme totale des points obtenus soit comprise entre 300 et 400 ?

Exercice 24. Statistiques du BAC

Les statistiques des notes obtenues en mathématiques au BAC STI en France pour l'année 2006 sont : Moyenne nationale $\mu = 10,44$ et écart type $\sigma = 1,46$.

Une classe de BTS comporte 35 élèves en 2006/2007 issus d'un BAC STI en 2006. Calculer la probabilité que la moyenne en mathématique de cette classe soit supérieure à 10.

6. Application professionnelle (BTS)



Contexte réel

- tolérances mécaniques
- temps d'attente - mesures physiques

Exemple

Une pièce doit mesurer entre 79,8 et 80,2 mm.

 On calcule la probabilité qu'elle soit conforme.

Point clé

 La loi normale modélise **les phénomènes naturels avec variation**

À retenir

- loi uniforme = répartition égale
 - loi normale = phénomène réel
 - toujours raisonner avec des intervalles
-

Séquence 3 : Loi de probabilité discrète : loi binomiale



Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- reconnaître un schéma de Bernoulli ;
- utiliser la loi binomiale ;
- calculer une probabilité ;
- interpréter une espérance.

 → [L'essentiel](#)

I - Théorie



DÉFINITIONS

- On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve aléatoire n'ayant que deux issues contraires S (succès) de probabilité p , et \bar{S} (échec) de probabilité $1 - p$.
- Un **schéma de Bernoulli** de rang n , où n est un entier naturel non nul, est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- Soit X la variable aléatoire définie sur un schéma de Bernoulli de rang n et associant le nombre de succès S (de probabilité p). La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p , et est notée $\mathcal{B}(n; p)$.

THÉORÈME

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ alors :

- pour tout entier k dans l'intervalle $[0; n]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ où
- $\binom{n}{k}$ (se lit « k parmi n ») est l'entier défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- l'espérance et la variance de X sont respectivement $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- On en déduit l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)}$.

REMARQUE : L'entier $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n . On le note aussi C_n^k .

 → [Voir Exercice résolu 2](#)

1. Situation d'introduction

Exemples :

- réussite à un test
- panne d'un appareil
- présence d'un défaut

 On répète une expérience plusieurs fois.

2. Cours

2.1 Épreuve de Bernoulli

Deux issues :

- succès (probabilité p)
- échec (probabilité $1 - p$)

2.2 Schéma de Bernoulli

On répète n fois l'expérience :

 conditions :

- identiques
 - indépendantes
-

2.3 Loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n; p)$$

Probabilité

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Paramètres

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

3. Méthodes

Méthode 1 - Identifier une loi binomiale

Vérifier :

- répétition
 - indépendance
 - même probabilité
-

Méthode 2 - Calculer une probabilité

1. Identifier n , p , k
 2. Appliquer la formule ou calculatrice
-

II - Exercice résolu

2. Déterminer une loi de probabilité binomiale

Utilisation de la calculatrice

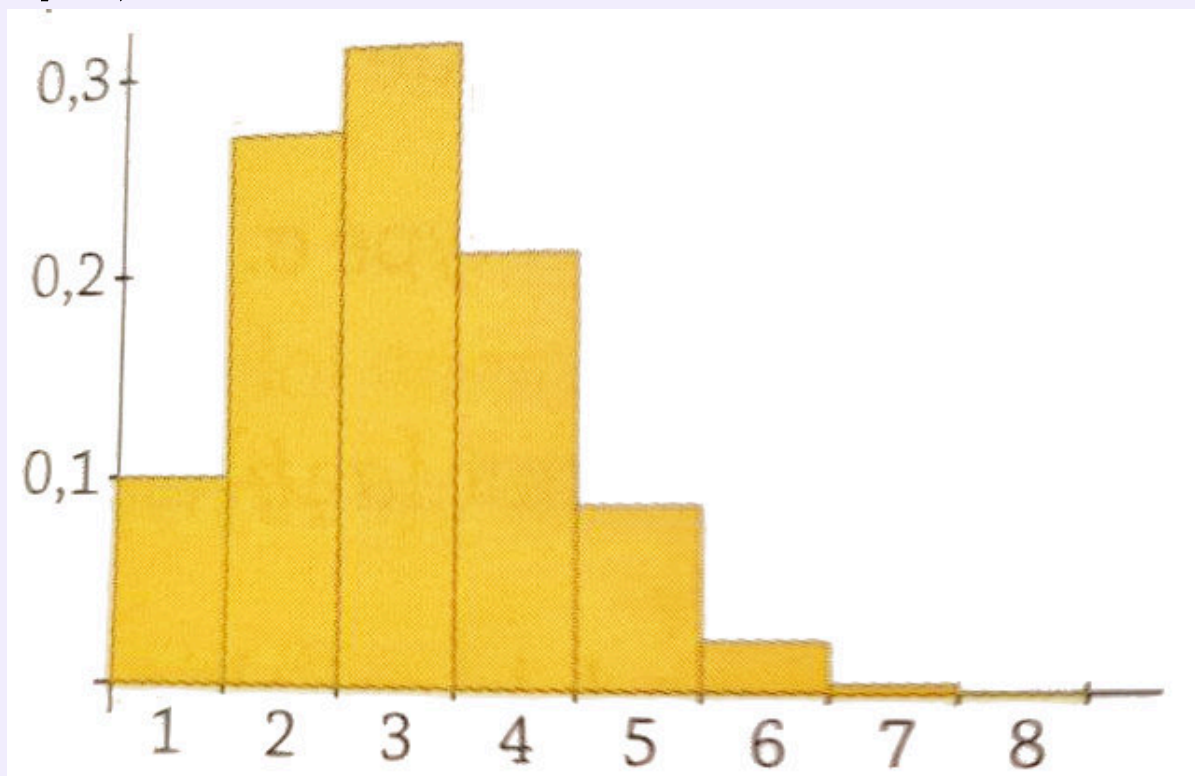
Énoncé :

Un QCM est composé de huit questions indépendantes où, pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées et une seule est juste. Un candidat répond au hasard aux huit questions de ce QCM. On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1. Déterminer la loi de probabilité de N et la représenter à l'aide d'un diagramme en bâton.
2. Déterminer son espérance. En déduire la notation du QCM pour qu'un candidat répondant au hasard ait en moyenne 0.

Résolution

1. En répondant au hasard, le candidat a une probabilité de 0,25 (une chance sur quatre) d'avoir juste à chacune des 8 questions. Les questions étant indépendantes, N suit donc une **loi de probabilité binomiale** de paramètres $n = 8$ et $p = 0,25$.



[Image d'un diagramme en bâtons d'une loi binomiale $B(8, 0.25)$]

Ainsi pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 8$:

$$P(N = k) = \binom{8}{k} 0,25^k \cdot 0,75^{8-k}$$

(Valeurs déterminées à la calculatrice pour le diagramme en bâton).

2. D'après le cours, l'espérance est :

$$E(N) = n \times p = 8 \times 0,25 = 2$$

Ainsi le candidat qui répond au hasard a en moyenne deux réponses justes et donc

six fausses. Pour que la moyenne soit nulle, si l'on ôte 1 point par réponse fausse (total -6), il faudra attribuer **3 points** par réponse bonne ($2 \times 3 = 6$).

Méthode

On justifie dans un premier temps qu'il s'agit d'une loi binomiale (répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes) dont on donne les paramètres. On peut ensuite appliquer les formules du cours ($P(X = k)$ et $E(X)$).

III - Exercices pour appliquer

Pour appliquer → *L'essentiel*

Exercices 13 - 15 :

- Exercice 13. Gestion des absences (Loi binomiale)
- Exercice 14. Épreuves de Bernoulli répétées
- Exercice 15. Maintenance informatique

Loi de probabilité discrète

Exercice 13. Gestion des absences (Loi binomiale)

Une entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique a permis d'admettre qu'un jour donné, la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour tiré au hasard, associe le nombre d'employés absents.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - **a)** « Un jour donné il y a exactement 3 absents. »
 - **b)** « Un jour donné il y a au moins 3 absents. »
 - **c)** « Un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6. »
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(X)$?

Exercice 14. Épreuves de Bernoulli répétées

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès S est $0,7$ ($P(S) = 0,7$). On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire qui associe à n de ces épreuves de Bernoulli effectuées de manières indépendantes le nombre k de succès (respectivement le nombre k d'échecs).

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?
2. Donner en fonction de n l'expression de $P(X = k)$, $P(Y = k)$, $P(X = 0)$, $P(X > 0)$, $P(Y = n)$.
3. On suppose que $n = 10$, calculer : $P(X = 0)$, $P(X = 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X > 2)$, l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Exercice 15. Maintenance informatique

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de $0,01$. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

1. Donner la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2. Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.
3. Calculer la probabilité de l'évènement : « au moins un ordinateur est en panne ».
4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles. Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter le résultat.

IV - Exercice pour s'entraîner

 **Pour appliquer** → *L'essentiel*

Exercice 25. Contrôle qualité et loi binomiale

Exercice 25. Contrôle qualité et loi binomiale

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8% des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que :

- 5% des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10% des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note

- C l'évènement « l'article est conforme aux normes » et
- T l'évènement « l'article est accepté par le test ».

1. Reproduire puis compléter sous forme de pourcentage le tableau ci-dessous :

	C	\bar{C}	Total
T (Accepté)			
\bar{T} (Refusé)			
Total			100 %

- Déterminer la probabilité de l'évènement $C \cap T$.
- Déterminer la probabilité $P(T)$ que la pièce soit acceptée par le test.
- On suppose pour la suite que la probabilité que l'article soit accepté par le test est de 0,882. On a prélevé successivement 20 articles dans la production et on suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour que le tirage puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On donnera les résultats obtenus à la calculatrice et arrondis au millième si nécessaire.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'articles acceptés par le test parmi les 20 articles prélevés au hasard.

- a) Calculer la loi de probabilité de X . Préciser ses paramètres.
- b) Déterminer la probabilité que 18 des 20 articles soient acceptés par le test.
- c) Déterminer la probabilité qu'au maximum 18 articles soient acceptés par le test.
- d) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 articles soient refusés par le test.

Application professionnelle (BTS)



Contexte

- défauts en production
- pannes machines
- gestion des risques

Exemple

Sur 100 pièces, combien sont défectueuses ?

 modèle binomial

Point clé

  permet de prévoir des quantités

À retenir

- répétition = loi binomiale
- espérance = moyenne attendue
- utile pour prévoir

Séquence 4 : Théorème central limite

Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- comprendre le théorème central limite ;
- approcher une loi binomiale ;
- utiliser la loi normale ;
- appliquer la correction de continuité.

 → [L'essentiel](#)

Théorie

X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé (Ω, E, P) . On note $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X .

DÉFINITION

X et Y sont dites indépendantes si, pour tout couple $(x; y)$ de nombres réels :

$$P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y).$$

PROPRIÉTÉS

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$ où a et b sont des constantes réelles.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

REMARQUE : D'après le premier point, on montre que X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ si et seulement si la variable aléatoire $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

THÉORÈME

Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de probabilité P d'espérance μ et d'écart type σ .

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$C_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

et X la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$, alors :

Pour tout $[a; b] \subset \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n \in [a; b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = P(X \in [a; b])$$

Conséquence pratique

Ainsi, pour n suffisamment grand, la variable aléatoire $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ (la moyenne échantillonnale) suit approximativement la loi normale :

$$\mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

1. Situation d'introduction

Quand n devient grand :

👉 les calculs binomiaux deviennent difficiles.

📖 2. Cours

2.1 Idée fondamentale

👉 somme de variables → loi normale

2.2 Théorème central limite

$$C_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

suit :

$$\mathcal{N}(0; 1)$$

2.3 Moyenne

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

2.4 Approximation binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n; p)$$

$$X \approx \mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$$

Conditions

$$np \geq 15$$

$$n(1-p) \geq 15$$

2.5 Correction de continuité

$$P(X = k) \approx P(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$$

3. Méthodes

1. vérifier les conditions
 2. calculer μ et σ
 3. passer à la loi normale
 4. corriger
 5. utiliser calculatrice
-

4. Exemple détaillé

$$X \sim \mathcal{B}(100; 0,5)$$

Paramètres

$$\mu = 50$$

$$\sigma = 5$$

Calcul

$$P(X \geq 60) \approx P(Y \geq 59,5)$$

$$Z = \frac{59,5 - 50}{5} = 1,9$$

$$P \approx 0,029$$

5. Exercices

Exercice 1

- 200 pièces
- $p = 0,05$

Calculer $P(X \leq 15)$

Exercice 2

- 200 lancers

$P(90 \leq X \leq 110)$

Exercice 3

- 150 pièces
- $p = 0,1$

$$P(X \geq 20)$$

Application professionnelle (BTS)



Contexte

- production de masse
 - contrôle qualité
 - statistiques
-

Exemple

Sur 500 pièces :

 combien seront défectueuses ?

Point clé



plus n est grand \rightarrow meilleure approximation



À retenir

- TCL = simplification
- passer de binomiale à normale
- toujours vérifier conditions

- toujours corriger
-