

# Séquence 1

## Thème de la séquence : Conditionnement et indépendance



### Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- calculer une probabilité conditionnelle ;
- utiliser la formule des probabilités totales ;
- modéliser une situation avec un arbre de probabilités ;
- déterminer si deux événements sont indépendants ;
- interpréter un résultat dans un contexte concret.

 → [L'essentiel](#)

## I - Théorie

Soit  $(\Omega, E, P)$  un espace probabilisé. Pour  $A \in E$  on note  $\bar{A}$  son événement contraire.



### PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Si  $P(A) \neq 0$ , on définit l'application  $P_A$  qui, à tout événement  $B$  de  $\Omega$ , associe le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A$  est une probabilité sur  $\Omega$  appelée "**probabilité conditionnelle** sachant que  $A$  est réalisé".

**REMARQUE** :  $P_A(B)$  se note aussi  $P(B|A)$  et se lit « probabilité de  $B$  sachant  $A$  ».

## Formule des probabilités totales

Si les événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , où  $n$  est un entier naturel non nul, forment une **partition** de l'univers et sont de probabilités non nulles, alors pour tout événement  $B$  de  $\Omega$  :

$$P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B)P(A_n)$$

En particulier, pour tous évènements  $A$  et  $B$  avec  $P(A)$  non nulle et non égale à 1, on a :

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$$

## Indépendance

### 🔗 DÉFINITION

Deux évènements  $A$  et  $B$  sont dits **indépendants** lorsque la réalisation de l'un des deux évènements n'a aucune influence sur celle de l'autre, ce qui se traduit lorsque la probabilité conditionnelle est définie (c'est-à-dire  $P(A) \neq 0$  ou  $P(B) \neq 0$ ) par :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A) = P(A)$$

Remarque : Les évènements de probabilités nulles sont indépendants de tout évènement.

**Conséquence** : Les évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

→ Voir Exercice résolu 1

## 🧭 1. Situation d'introduction

Dans une entreprise, une pièce passe par deux machines.

On constate que :

- certaines pièces sont défectueuses après la première machine ;
- la probabilité d'un défaut après la seconde dépend de la première.

👉 Question : comment modéliser et calculer ces probabilités ?

---

## 📖 2. Cours

### 2.1 Probabilité conditionnelle

#### Définition

Soient deux évènements  $A$  et  $B$  avec  $P(A) \neq 0$ .

La probabilité de  $B$  sachant  $A$  est :

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

#### Interprétation

👉 On se place **uniquement** dans les cas où  $A$  est réalisé.

---

## 2.2 Arbre de probabilités

Un arbre permet de représenter une expérience en plusieurs étapes.

### Règles

- Sur une branche : probabilité conditionnelle
  - Sur un chemin : on **multiplie**
  - Pour plusieurs cas : on **additionne**
- 

## 2.3 Formule des probabilités totales

Si  $A$  et  $\bar{A}$  forment une partition :

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})$$

👉 On additionne les différents cas possibles.

---

## 2.4 Indépendance

Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

### Interprétation

👉 La réalisation de l'un **n'influence pas** l'autre.

---

## 3. Méthodes

### Méthode 1 — Calculer une probabilité conditionnelle

1. Identifier  $A$  et  $B$
  2. Calculer  $P(A \cap B)$
  3. Calculer  $P(A)$
  4. Appliquer la formule
-

## Méthode 2 — Utiliser un arbre

1. Identifier les étapes
  2. Placer les probabilités
  3. Multiplier le long des branches
  4. Additionner si nécessaire
- 

## Méthode 3 — Probabilités totales

1. Identifier les cas (partition)
  2. Calculer chaque branche
  3. Additionner
- 

## II - Exercices résolus

### Exercice résolu 1. Appliquer la probabilité conditionnelle

#### Énoncé :

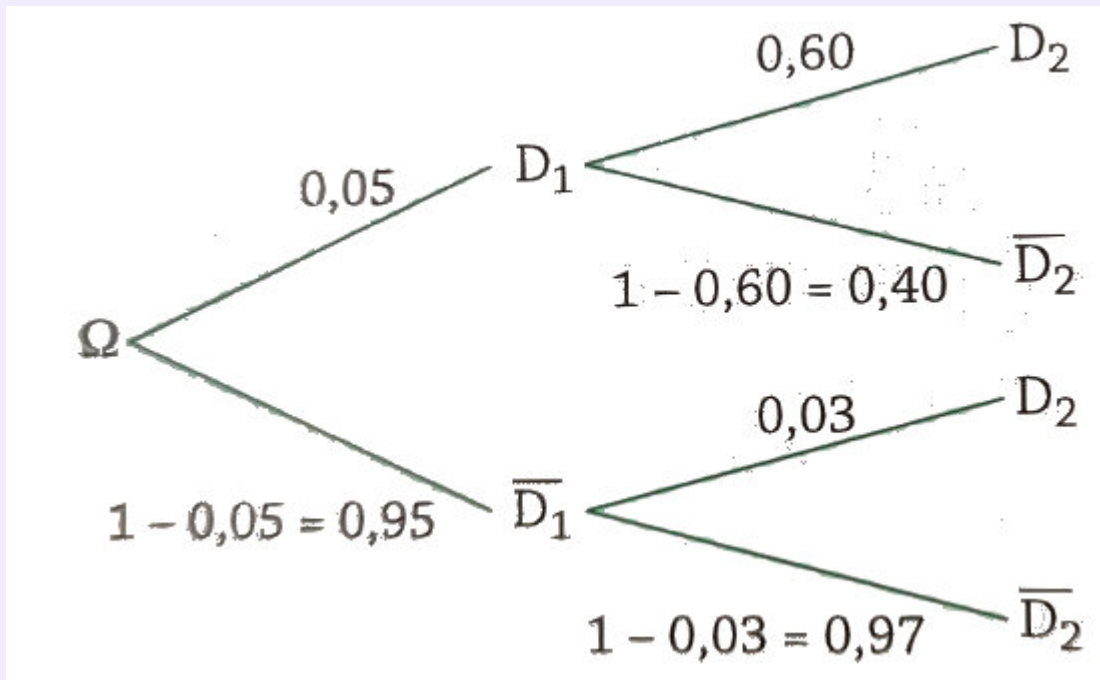
Pour fabriquer un appareil, on utilise successivement, et dans cet ordre, deux machines  $M_1$  et  $M_2$  qui provoquent chacune un défaut respectivement noté  $D_1$  et  $D_2$ .

Un relevé statistique permet d'estimer que :

- À la sortie de  $M_1$ , 5 % des appareils présentent un défaut  $D_1$  ;
- À la sortie de  $M_2$ , 60 % des appareils ayant le défaut  $D_1$  présentent le défaut  $D_2$  alors que seulement 3 % des appareils n'ayant pas le défaut  $D_1$  présentent le défaut  $D_2$ .

On prélève au hasard un appareil. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de défaut ? Qu'il présente le défaut  $D_2$  ?

#### ☰ Résolution



[Image d'un arbre de probabilité pondéré avec branches  $D_1$  et  $D_2$ ]

On cherche la probabilité que l'appareil n'ait pas de défaut, soit :

$$P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = 0,95 \times 0,97 = 0,9215$$

On cherche ensuite la probabilité qu'il ait le défaut  $D_2$ . D'après la **formule des probabilités totales** :

$$P(D_2) = P_{D_1}(D_2) \cdot P(D_1) + P_{\overline{D_1}}(D_2) \cdot P(\overline{D_1})$$

$$P(D_2) = 0,60 \times 0,05 + 0,03 \times 0,95 = 0,0585$$

### Méthode

- On construit l'arbre de probabilité afin de clarifier l'énoncé.
- La probabilité d'un évènement est égale au produit des probabilités rencontrées sur le chemin pour définir cet évènement.

## III - Exercices pour appliquer

 **Pour appliquer** → *L'essentiel*

Exercices 1 - 4 :

- Exercice 1. Étude sur 110 étudiants – pour manipuler les tableaux de contingence
- Exercice 2. Composants électroniques – pour s'entraîner sur les probabilités totales et les erreurs de contrôle
- Exercice 3. Calculer P
- Exercice 4. Deux urnes

## Exercice 1. Étude sur 110 étudiants

110 étudiants se répartissent de la façon suivante :

	Fille	Garçon	Total
<b>Pratiquent un sport</b>	32	48	80
<b>Ne pratiquent aucun sport</b>	10	20	30
<b>Total</b>	42	68	110

On tire au hasard un étudiant parmi les 110 et on considère les évènements suivants :

- $F$  : « L'étudiant est une fille »
- $S$  : « L'étudiant pratique un sport »

1. À l'aide du tableau, déterminer les probabilités suivantes :  $P(S)$ ,  $P(F \cap S)$ ,  $P(F)$ .
2. Vérifier que

$$P(F \cap S) = P_S(F) \times P(S)$$

3. Déterminer la probabilité de l'évènement : « être un garçon ou ne pas pratiquer de sport ».

## Exercice 2. Contrôle de composants électroniques

Un atelier contrôle les composants électroniques fabriqués en grande quantité. 2 % des composants sont défectueux. Le contrôle est tel que 95 % des composants non défectueux sont acceptés et que 98 % des composants défectueux sont refusés.

1. On considère un lot de 10 000 composants. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Défectueux	Non défectueux	Total
<b>Acceptés</b>			
<b>Refusés</b>			
<b>Total</b>			<b>10 000</b>

2. On prélève au hasard un composant. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
- $E_1$  : « Le composant est défectueux et accepté ».
  - $E_2$  : « Le composant est bon et refusé ».
  - $E$  : « Il y a une erreur de contrôle ».
3. Déterminer la probabilité de l'évènement : « Le composant est bon sachant qu'il a été refusé ».
- 

### Exercice 3. Calculs théoriques

On considère les deux évènements  $A$  et  $B$  tels que  $P(A) = 0,3$  ;  $P(B) = 0,5$  et  $P(A \cup B) = 0,7$ .  
Calculer  $P(A \cap B)$ ,  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .

---

### Exercice 4. Tirage dans deux urnes

Deux urnes  $A$  et  $B$  de même apparence contiennent respectivement :

- **Urne A** : 3 boules rouges et 2 boules vertes.
- **Urne B** : 2 boules rouges et 3 boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

1. Calculer la probabilité qu'elle soit rouge.
  2. On suppose que la boule tirée est rouge. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $A$ .
- 

## IV - Exercices pour s'entraîner

Exercices 16 - 18 :

- Exercice 16. Une maladie rare
- Exercice 17. Atelier du composant électronique
- Exercice 18. Taux d'alcoolémie

### Conditionnement et indépendance

#### Exercice 16. Une maladie rare

Une maladie rare est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10 000. Un test de dépistage est tel que si une personne est malade, le test est positif à 99 %, et si une personne est saine le test est positif à 0,1 %. On note  $M$  et  $T$  les évènements respectifs « la personne est malade » et « le test est positif ».

1. Dédire de l'énoncé  $P(M)$ ,  $P_M(T)$  et  $P_{\bar{M}}(T)$ .
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer  $P(T)$ .
3. Déterminer la probabilité qu'une personne positive au test soit effectivement malade. Que constatez-vous ?
4. Reprendre la question 3. avec une proportion de malades de 10 %. Qu'en déduire sur l'efficacité des tests de dépistage ?

## Exercice 17. Atelier du composant électronique

Un atelier produit un composant électronique en deux phases indépendantes. La première est susceptible de faire apparaître un défaut  $A$  sur 2 % des composants, la seconde un défaut  $B$  sur 3 % des composants. On prélève au hasard un composant dans la production. Calculer à  $10^{-4}$  près la probabilité de chacun des évènements suivants :

1. Le composant présente les deux défauts.
2. Le composant présente au moins un des deux défauts.
3. Le composant ne présente aucun des deux défauts.
4. Le composant présente un et un seul des deux défauts.

## Exercice 18. Taux d'alcoolémie

Le seuil maximal d'alcoolémie toléré pour conduire une automobile est 0,5 gramme par litre. Un laboratoire a mis au point un éthylotest présentant les défauts suivants :

- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré, l'éthylotest est positif 96 fois sur 100 ;
- lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré, l'éthylotest est positif 2 fois sur 100. Dans une région donnée, 95 % des conducteurs d'automobile ont un seuil d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré. On soumet au hasard un automobiliste de cette région à l'éthylotest. On définit les évènements suivants :
  - $O$  : « l'éthylotest est positif » et
  - $S$  : « le conducteur a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré ».

1. Définir les évènements  $\bar{O}$  et  $\bar{S}$ .
2. Que valent  $P(S)$ ,  $P(\bar{S})$ ,  $P_S(O)$  et  $P_{\bar{S}}(O)$  ?
3. Calculer la probabilité que l'automobiliste ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré et que l'éthylotest soit positif.
4. a) Calculer  $P(O \cap S)$  puis  $P(O)$ . b) Calculer la probabilité qu'il ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré sachant que l'éthylotest est positif.

5. Calculer la probabilité que l'éthylotest donne un résultat erroné.

## VI Outil numérique

Utilisation d'un logiciel de schématisation ou d'un module interactif Moodle pour construire des arbres.



### Application professionnelle (BTS)



#### Contexte réel

Dans les métiers techniques ou tertiaires :

- diagnostic de panne
- contrôle qualité
- tests médicaux ou industriels
- fiabilité d'un système



#### Exemple

Un technicien doit déterminer :

- si un défaut vient d'une machine précise
- si un test est fiable



Il utilise :

- probabilité conditionnelle
- arbre
- probabilités totales



#### Point clé



Dans la réalité, les événements sont souvent **dépendants**



#### Exemple :

- une panne influence les étapes suivantes

- un test dépend de l'état du système
- 



## À retenir

- $P(B | A)$  = changer de point de vue
  - arbre = outil essentiel
  - multiplier sur un chemin
  - additionner les cas
  - indépendance = situation particulière
-