Séquence 2

Thème de la séquence : Lois à densité

Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- reconnaître une variable aléatoire continue ;
- utiliser la loi uniforme ;
- utiliser la loi normale ;
- calculer et interpréter des probabilités ;
- exploiter une calculatrice ou un outil numérique.

I - Théorie

$\rightarrow$ ***L'essentiel***

Loi uniforme sur $[a;b]$

DÉFINITION

Une variable aléatoire X à valeur dans $[a;b]$ suit la **loi uniforme** $\mathcal{U}_{[a;b]}$ sur $[a;b]$ lorsque sa densité de probabilité est une fonction constante, nécessairement égale à $\frac{1}{b-a}$.

Pour tout $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Ainsi, pour tout $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$, $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de } [\beta;\alpha]}{\text{longueur de } [a;b]}$.

PROPRIÉTÉ

Pour une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a;b]$:

- **Espérance :** $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- **Variance :** $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- **Écart type :** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$

DÉFINITION

Une variable aléatoire X suit la **loi normale** $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ d'espérance μ et d'écart type σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Ainsi pour tout $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$: $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.
L'espérance et l'écart type de X sont respectivement $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$.

THÉORÈME (Loi Normale)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors :

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

→ Voir Exercices résolus 3 et 4

🧭 1. Situation d'introduction

On mesure :

- le temps d'attente d'un client
- la taille d'une pièce mécanique
- une performance (QI, note…)

👉 Ces grandeurs peuvent prendre **une infinité de valeurs**.

📖 2. Cours

2.1 Variable aléatoire continue

Contrairement au cas discret :

👉 $P(X = a) = 0$

On travaille avec des intervalles :

$$P(a \leq X \leq b)$$

2.2 Loi uniforme

Définition

Une variable X suit une loi uniforme sur $[a;b]$ si toutes les valeurs sont équiprobables.

$$X \sim \mathcal{U}([a;b])$$

Probabilité

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Paramètres

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.3 Loi normale

Définition

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$$

- μ : moyenne
- σ : écart type

Propriétés fondamentales

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

🛠️ 3. Méthodes

Méthode 1 — Loi uniforme

1. Identifier a et b
2. Identifier l'intervalle
3. Appliquer la formule

Méthode 2 — Loi normale

1. Identifier μ et σ
2. Traduire la question
3. Utiliser :
   - symétrie
   - calculatrice

II - Exercices résolus

Exercice résolu 3. Généraliser l'équiprobabilité sur un intervalle : la loi uniforme

Énoncé :

1. Dans l'intervalle $[0;1[$, quel est le nombre d'éléments dont l'écriture décimale comporte au plus 1 chiffre après la virgule ? 2 chiffres ? 5 chiffres ? k chiffres, où k est un entier naturel non nul ?
2. Soient n un entier naturel non nul et $\Omega = E_k$ l'ensemble des réels de $[0;n[$ dont l'écriture décimale comporte au plus k chiffres après la virgule. On choisit au hasard un nombre dans Ω.
   - **a)** Montrer que la probabilité de tirer un nombre au hasard dans Ω est $\frac{10^{-k}}{n}$.
   - **b)** De manière générale, si t est un élément de Ω, quelle est la probabilité de l'évènement $B = \{x \in \Omega\ ;\ x < t\}$?
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;n[$. Pour $t \in [0;n[$, exprimer en fonction de t : $F(t) = P(X < t)$, fonction de répartition de X. Qu'en déduit-on ?

Résolution

1. On a respectivement 10, 100, 10^5 et 10^k éléments dans l'intervalle $[0;1[$.
2. **a)** Dans $[0;1[$, on a 10^k éléments de sorte que dans l'intervalle $[0;n[$, on en a n fois plus. Le tirage au hasard fait que tous ces éléments ont la même probabilité d'être choisis (loi équirépartie), soit :

$$\frac{1}{n \cdot 10^k} = \frac{10^{-k}}{n}$$

b) Nous obtenons $P(B) = \frac{t}{n}$.

3. On a

$$F(t) = P(X < t) = \frac{t - 0}{n - 0} = \frac{t}{n}$$

On retrouve la même probabilité que dans le cas discret avec la loi équirépartie. La loi uniforme généralise, au continu, l'équiprobabilité du cas discret.

Méthode

On justifie qu'il s'agit d'une loi équirépartie dont on donne les caractéristiques. On peut ensuite appliquer les résultats du cours pour cette loi.

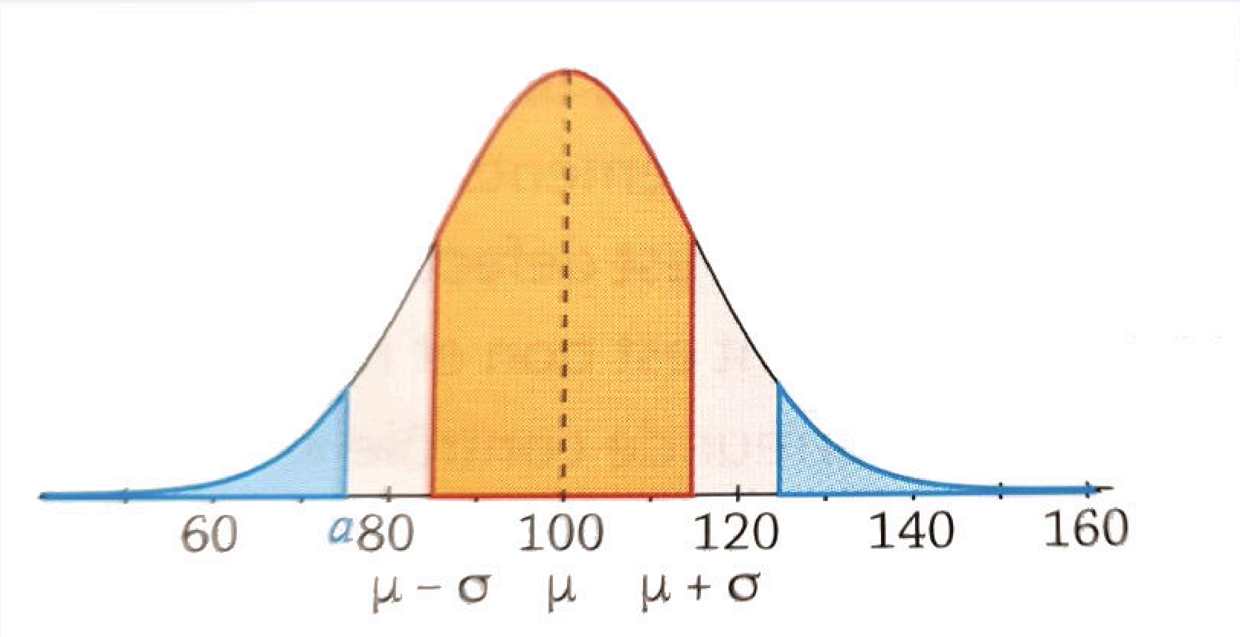
Exercice résolu 4. Déterminer une loi de probabilité normale

Utilisation de la calculatrice

Énoncé :
En 1955, Wechsler (1896-1981) propose un test de mesure de QI (Quotient Intellectuel) des adultes auprès d'un échantillon représentatif de la population d'un âge donné. Les performances suivent une loi normale d'espérance égale à $\mu = 100$ et d'écart type égal à $\sigma = 15$.

1. Quel est le pourcentage de personnes dont le QI est inférieur à 100 ?
2. Quelle chance a-t-on d'obtenir un QI compris entre 85 et 115 ? Entre 105 et 110 ?
3. Une personne avec un score de 69 fait-elle partie des 5 % inférieurs de la distribution ?

Résolution



1. Par symétrie de la courbe, on obtient $P(X<\mu)=0,5$, soit :

$$P(X<100)=0,5$$

2. On a $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0,68$ d'après le cours, d'où la probabilité cherchée.
   À la calculatrice : $P(105<X<110)\approx 0,12$.
3. Cherchons t tel que $F(t)=P(X<t)=0,05$. À la calculatrice nous trouvons $t\approx 75,33$.
   Ainsi, la fonction de répartition F étant croissante, pour un score de 69 on a $F(69)<0,05$. La personne fait donc partie des 5 % inférieurs de la distribution.

Méthode

On utilise les propriétés de symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale.

III - Exercices pour appliquer

Pour appliquer → *L'essentiel*

Exercices 5 - 12 :

```
- Exercice 5. Observation de chamois
- Exercice 6. Pièces mécaniques
- Exercice 7. Inéquation aléatoire
- Exercice 8. Calculs de probabilités (Loi normale)
- Exercice 9. Recherche de seuils (Loi normale)
```

```
- Exercice 10. Calcul de l'espérance m
- Exercice 11. Calcul de l'écart type σ
- Exercice 12. Problème de rendez-vous (Loi uniforme)
```

Exercice 5. Observation de chamois

Dans un parc national, un guide propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil. Le temps d'attente T du groupe, en heures, avant l'arrivée des animaux suit une loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$.
Calculer les probabilités suivantes :

- **a)** $P(T > 0,5)$
- **b)** $P(0,2 < T < 0,6)$
- **c)** $P(T = 0,6)$

Exercice 6. Pièces mécaniques

Un appareil de mesure évalue l'épaisseur en cm de pièces mécaniques qui est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0; 20]$. Les pièces sont acceptées si leur épaisseur est supérieure à 12 cm.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer la probabilité qu'une pièce soit acceptée.
2. Une pièce a une épaisseur supérieure à 10 cm. Quelle est la probabilité qu'elle soit acceptée ?
3. On note $\mu = E(X)$ l'espérance de X et $\sigma = \sigma(X)$ son écart type. Calculer

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

Exercice 7. Inéquation aléatoire

1. Résoudre l'équation $x^2 - 2x = 0$.
2. On choisit au hasard un réel dans l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$. Calculer la probabilité qu'il soit solution de l'inéquation $x^2 - 2x > 0$.

Loi Normale

ⓘ **Pour appliquer** $\rightarrow$ ***L'essentiel***

Exercice 8. Calculs de probabilités (Loi normale)

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20\ ;\ 5)$. À l'aide de la calculatrice, déterminer à 10^{-2} près :

- **a)** $P(X < 28)$
- **b)** $P(X > 28)$
- **c)** $P(X > 12)$
- **d)** $P(12 < X < 28)$
- **e)** $P(15 < X < 25)$

Exercice 9. Recherche de seuils (Loi normale)

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20\ ;\ 5)$. À l'aide de la calculatrice, déterminer à 10^{-2} près le nombre réel α tel que :

- **a)** $P(X < \alpha) = 0,99$
- **b)** $P(X \leq \alpha) = 0,01$
- **c)** $P(X > \alpha) = 0,05$
- **d)** $P(X \geq \alpha) = 0,9$
- **e)** $P(20 - \alpha \leq X \leq 20 + \alpha) = 0,95$

Exercice 10. Calcul de l'espérance m

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m\ ;\ 2)$.

1. Calculer m pour que $P(X > 25) = 0,95$.
2. Calculer m pour que $P(X > 25) = 0,05$.

Exercice 11. Calcul de l'écart type σ

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(20\ ;\ \sigma)$.

1. Calculer σ pour que $P(X < 22) = 0,9$.
2. Calculer σ pour que $P(18 < X < 22) = 0,9$.

Exercice 12. Problème de rendez-vous (Loi uniforme)

M. Dupont et M. Dupond se donnent rendez-vous entre 12 h et 13 h. M. Dupont et M. Dupond se donnent rendez-vous entre 12 h et 13 h. Proche du lieu fixé, M. Dupond arrivera assurément à 12 h 30. Quant à M. Dupont, son arrivée dépend des conditions de circulation : il arrivera entre 12 h et 13 h.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de M. Dupont ?
2. Calculer la probabilité que M. Dupont arrive avant M. Dupond.
3. Calculer la probabilité que M. Dupond attende M. Dupont plus de 10 min.

IV - Exercices pour s'entraîner

Exercices 19 - 24 :

Loi à densité

ⓘ **Utilisation de la calculatrice**

Exercice 19. La taille de 2 500 hommes

On mesure la taille en cm de 2 500 hommes ; la distribution obtenue suit une loi normale de moyenne égale à 169 cm et d'écart type égal à 5,6 cm.

1. Déterminer le pourcentage d'hommes dont la taille est inférieure à 155 cm.
2. Déterminer le pourcentage d'hommes dont la taille est comprise entre 155 cm et 175 cm.
3. Déterminer l'intervalle, centré sur la valeur moyenne de la taille, qui contient 60 % de la population en question.

Exercice 20. Production des pipettes

Le diamètre intérieur d'un échantillon de 200 pipettes produites par une machine est estimé à 0,501 cm, et l'écart type moyen est de l'ordre de 0,004 cm. La distribution de ces diamètres suit une loi normale. Ces pipettes doivent passer dans une chaîne de montage entièrement automatisée mais elles ne peuvent convenir pour cela que si et seulement si leur diamètre est compris entre 0,496 et 0,508 cm.

1. Déterminer le pourcentage de pipettes qui devront être considérées comme défectueuses.
2. Comment ce pourcentage évolue-t-il si la nouvelle machine de vérification n'admet que des diamètres compris entre $0,498$ et $0,510$?

Exercice 21. Somme de variables aléatoires discrètes

ⓘ **Utilisation de la calculatrice**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilités sont définies par les tableaux suivants :

x_i	**0**	**5**	**10**	**15**
P(X=x_i)	0,1	0,3	0,4	0,2

y_j	**-5**	**5**	**15**
P(Y=y_j)	0,4	0,3	0,3

Question : Calculer l'espérance mathématique et une valeur approchée de l'écart type de la variable aléatoire X+Y.

---

22. Somme de variables normales

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent respectivement les lois normales $\mathcal{N}(20\ ;\ 4)$ et $\mathcal{N}(17\ ;\ 3)$. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$ et on admet que Z suit une loi normale.

1. Montrer que l'espérance $E(Z)$ et l'écart type $\sigma(Z)$ sont respectivement égaux à 37 et 5.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « $32 < Z < 42$ ».
3. Déterminer le nombre réel positif α tel que la probabilité de l'évènement « $37 - \alpha < Z < 37 + \alpha$ » soit égale à $0,96$.

---

23. Somme de lancers de dés

On lance un dé non pipé 100 fois de façon indépendante.
Quelle est la probabilité que la somme totale des points obtenus soit comprise entre 300 et 400 ?

---

24. Statistiques du BAC

Les statistiques des notes obtenues en mathématiques au BAC STI en France pour l'année 2006 sont : Moyenne nationale $\mu = 10,44$ et écart type $\sigma = 1,46$.
Une classe de BTS comporte 35 élèves en 2006/2007 issus d'un BAC STI en 2006. Calculer la probabilité que la moyenne en mathématique de cette classe soit supérieure à 10.

🏭 Application professionnelle (BTS)

🔧 Contexte réel

- tolérances mécaniques
- temps d'attente
- mesures physiques

🎯 Exemple

Une pièce doit mesurer entre 79,8 et 80,2 mm.

👉 On calcule la probabilité qu'elle soit conforme.

⚠️ Point clé

👉 La loi normale modélise **les phénomènes naturels avec variation**

✅ À retenir

- loi uniforme = répartition égale
- loi normale = phénomène réel
- toujours raisonner avec des intervalles
