

Séquence 3

Thème de la séquence : Loi de probabilité discrète : loi binomiale



Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- reconnaître un schéma de Bernoulli ;
- utiliser la loi binomiale ;
- calculer une probabilité ;
- interpréter une espérance.

 → [L'essentiel](#)

I - Théorie



DÉFINITIONS

- On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve aléatoire n'ayant que deux issues contraires S (succès) de probabilité p , et \bar{S} (échec) de probabilité $1 - p$.
- Un **schéma de Bernoulli** de rang n , où n est un entier naturel non nul, est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- Soit X la variable aléatoire définie sur un schéma de Bernoulli de rang n et associant le nombre de succès S (de probabilité p). La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p , et est notée $\mathcal{B}(n; p)$.



THÉORÈME

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ alors :

- pour tout entier k dans l'intervalle $[0; n]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ où
- $\binom{n}{k}$ (se lit « k parmi n ») est l'entier défini par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- l'espérance et la variance de X sont respectivement $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- On en déduit l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1 - p)}$.

REMARQUE : L'entier $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments parmi n . On le note aussi C_n^k .

 → [Voir Exercice résolu 2](#)

1. Situation d'introduction

Exemples :

- réussite à un test
- panne d'un appareil
- présence d'un défaut

 On répète une expérience plusieurs fois.

2. Cours

2.1 Épreuve de Bernoulli

Deux issues :

- succès (probabilité p)
- échec (probabilité $1 - p$)

2.2 Schéma de Bernoulli

On répète n fois l'expérience :

 conditions :

- identiques
- indépendantes

2.3 Loi binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n; p)$$

Probabilité

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Paramètres

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

3. Méthodes

Méthode 1 - Identifier une loi binomiale

Vérifier :

- répétition
 - indépendance
 - même probabilité
-

Méthode 2 - Calculer une probabilité

1. Identifier n, p, k
 2. Appliquer la formule ou calculatrice
-

II - Exercice résolu

2. Déterminer une loi de probabilité binomiale

Utilisation de la calculatrice

Énoncé :

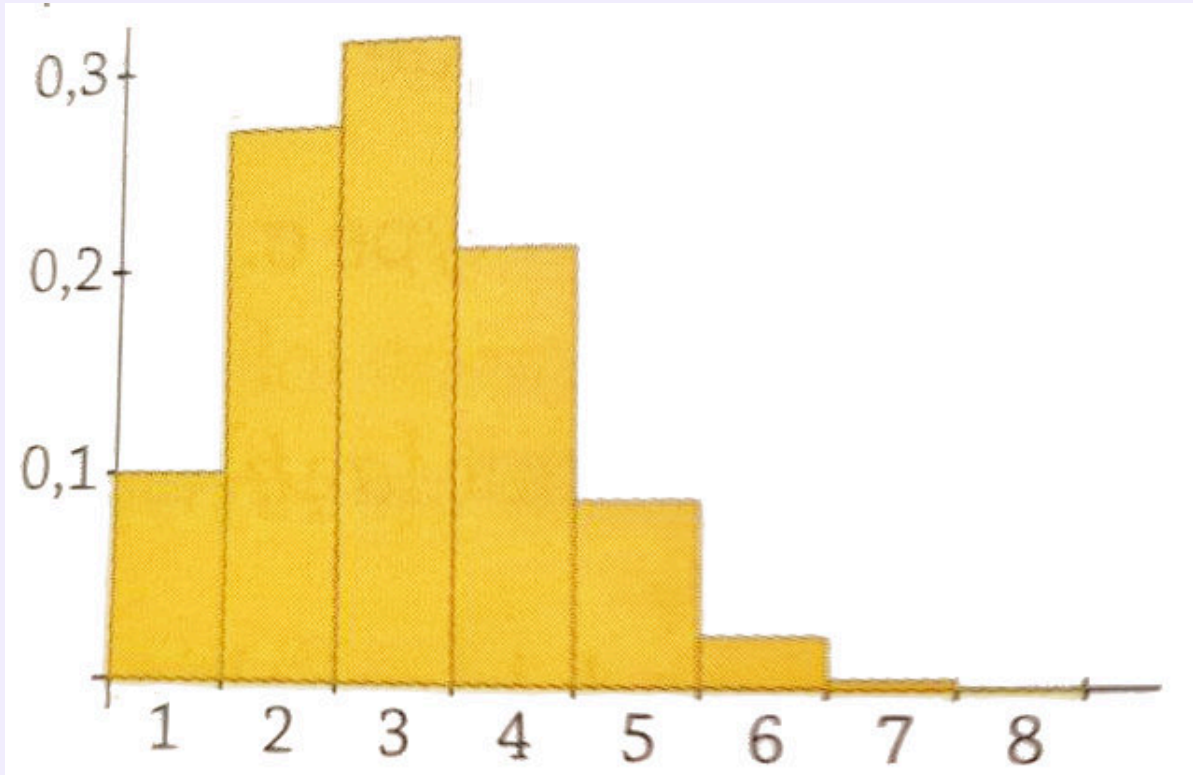
Un QCM est composé de huit questions indépendantes où, pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées et une seule est juste. Un candidat répond au hasard aux huit questions de ce QCM. On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1. Déterminer la loi de probabilité de N et la représenter à l'aide d'un diagramme en bâton.

2. Déterminer son espérance. En déduire la notation du QCM pour qu'un candidat répondant au hasard ait en moyenne 0.

☰ Résolution

1. En répondant au hasard, le candidat a une probabilité de 0,25 (une chance sur quatre) d'avoir juste à chacune des 8 questions. Les questions étant indépendantes, N suit donc une **loi de probabilité binomiale** de paramètres $n = 8$ et $p = 0,25$.



[Image d'un diagramme en bâtons d'une loi binomiale $B(8, 0.25)$]

Ainsi pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 8$:

$$P(N = k) = \binom{8}{k} 0,25^k \cdot 0,75^{8-k}$$

(Valeurs déterminées à la calculatrice pour le diagramme en bâton).

2. D'après le cours, l'espérance est :

$$E(N) = n \times p = 8 \times 0,25 = 2$$

Ainsi le candidat qui répond au hasard a en moyenne deux réponses justes et donc six fausses. Pour que la moyenne soit nulle, si l'on ôte 1 point par réponse fautive (total -6), il faudra attribuer **3 points** par réponse bonne ($2 \times 3 = 6$).

🔗 Méthode

On justifie dans un premier temps qu'il s'agit d'une loi binomiale (répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes) dont on donne les paramètres. On peut ensuite appliquer

les formules du cours ($P(X = k)$ et $E(X)$).

III - Exercices pour appliquer

 **Pour appliquer** → *L'essentiel*

Exercices 13 - 15 :

- Exercice 13. Gestion des absences (Loi binomiale)
- Exercice 14. Épreuves de Bernoulli répétées
- Exercice 15. Maintenance informatique

Loi de probabilité discrète

Exercice 13. Gestion des absences (Loi binomiale)

Une entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique a permis d'admettre qu'un jour donné, la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour tiré au hasard, associe le nombre d'employés absents.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - **a)** « Un jour donné il y a exactement 3 absents. »
 - **b)** « Un jour donné il y a au moins 3 absents. »
 - **c)** « Un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6. »
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(X)$?

Exercice 14. Épreuves de Bernoulli répétées

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès S est 0,7 ($P(S) = 0,7$). On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire qui associe à n de ces épreuves de Bernoulli effectuées de manière indépendante le nombre k de succès (respectivement le nombre k d'échecs).

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?
2. Donner en fonction de n l'expression de $P(X = k)$, $P(Y = k)$, $P(X = 0)$, $P(X > 0)$, $P(Y = n)$.

3. On suppose que $n = 10$, calculer : $P(X = 0)$, $P(X = 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X > 2)$, l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Exercice 15. Maintenance informatique

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

1. Donner la probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne.
2. Calculer la probabilité que 5 ordinateurs soient en panne.
3. Calculer la probabilité de l'évènement : « au moins un ordinateur est en panne ».
4. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles. Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter le résultat.

IV - Exercice pour s'entraîner

 **Pour appliquer** → *L'essentiel*

Exercice 25. Contrôle qualité et loi binomiale

Exercice 25. Contrôle qualité et loi binomiale

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que :

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
 - 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.
- On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note
- C l'évènement « l'article est conforme aux normes » et
 - T l'évènement « l'article est accepté par le test ».

1. Reproduire puis compléter sous forme de pourcentage le tableau ci-dessous :

	C	\bar{C}	Total
T (Accepté)			
\bar{T} (Refusé)			
Total			100 %

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $C \cap T$.
3. Déterminer la probabilité $P(T)$ que la pièce soit acceptée par le test.
4. On suppose pour la suite que la probabilité que l'article soit accepté par le test est de 0,882. On a prélevé successivement 20 articles dans la production et on suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour que le tirage puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On donnera les résultats obtenus à la calculatrice et arrondis au millième si nécessaire.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'articles acceptés par le test parmi les 20 articles prélevés au hasard.

- a) Calculer la loi de probabilité de X . Préciser ses paramètres.
- b) Déterminer la probabilité que 18 des 20 articles soient acceptés par le test.
- c) Déterminer la probabilité qu'au maximum 18 articles soient acceptés par le test.
- d) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 articles soient refusés par le test.



Application professionnelle (BTS)



Contexte

- défauts en production
- pannes machines
- gestion des risques



Exemple

Sur 100 pièces, combien sont défectueuses ?

👉 modèle binomial



Point clé



permet de prévoir des quantités



À retenir

- répétition = loi binomiale
 - espérance = moyenne attendue
 - utile pour prévoir
-