Séquence 4

Thème de la séquence : Théorème central limite

Objectif

À la fin de cette séquence, vous savez :

- comprendre le théorème central limite ;
- approcher une loi binomiale ;
- utiliser la loi normale ;
- appliquer la correction de continuité.

$\rightarrow$ *L'essentiel*

Théorie

X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé (Ω, E, P).
On note $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

DÉFINITION

X et Y sont dites indépendantes si, pour tout couple $(x; y)$ de nombres réels :
$P(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$.

PROPRIÉTÉS

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$ où a et b sont des constantes réelles.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

REMARQUE : D'après le premier point, on montre que X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ si et seulement si la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

THÉORÈME

> Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de probabilité P d'espérance μ et d'écart type σ.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$C_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

et X la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, alors :

Pour tout $[a\,;\,b] \subset \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n \in [a\,;\,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = P(X \in [a\,;\,b])$$

Conséquence pratique

Ainsi, pour n suffisamment grand, la variable aléatoire $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ (la moyenne échantillonnale) suit approximativement la loi normale :

$$\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

🧭 1. Situation d’introduction

Quand n devient grand :

👉 les calculs binomiaux deviennent difficiles.

📖 2. Cours

2.1 Idée fondamentale

👉 somme de variables → loi normale

2.2 Théorème central limite

$$C_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

suit :

$$\mathcal{N}(0;1)$$

2.3 Moyenne

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

2.4 Approximation binomiale

$$X \sim \mathcal{B}(n;p)$$

$$X \approx \mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$$

Conditions

$$np \geq 15$$

$$n(1-p) \geq 15$$

2.5 Correction de continuité

$$P(X=k) \approx P(k-0,5 \leq Y \leq k+0,5)$$

🛠️ 3. Méthodes

1. vérifier les conditions
2. calculer μ et σ
3. passer à la loi normale
4. corriger
5. utiliser calculatrice

🧠 4. Exemple détaillé

$$X \sim \mathcal{B}(100;0,5)$$

Paramètres

$$\mu = 50$$

$$\sigma = 5$$

Calcul

$$P(X \geq 60) \approx P(Y \geq 59,5)$$

$$Z = \frac{59,5 - 50}{5} = 1,9$$

$$P \approx 0,029$$

✍️ 5. Exercices

Exercice 1

- 200 pièces
- $p = 0,05$

Calculer $P(X \leq 15)$

Exercice 2

- 200 lancers

$P(90 \leq X \leq 110)$

Exercice 3

- 150 pièces
- $p = 0,1$

$P(X \geq 20)$

🏭 Application professionnelle (BTS)

🔥 🔧 **Contexte**

- production de masse
- contrôle qualité
- statistiques

🎯 Exemple

Sur 500 pièces :

👉 combien seront défectueuses ?

⚠️ Point clé

🔥 👉 **plus n est grand $\to$ meilleure approximation**

📋

✅ À retenir

- TCL = simplification
- passer de binomiale à normale
- toujours vérifier conditions
- toujours corriger
